13-12-17

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA – EXAMEN FINAL 13 DE DICIEMBRE DE 2017

1. Un grupo de sociólogos decide estudiar el fenómeno del desempleo. Para ello deciden realizar una encuesta a gente que ha recientemente conseguido trabajo, preguntando cuánto tiempo demoraron en salir de la situación de desempleo. Tras el procesamiento de 60 de estas encuestas, los resultados arrojan que, en promedio, los individuos de la muestra han estado desempleados por 8,5 meses. En base a información anterior, se sabe que la dispersión poblacional es de 0,77.

   a) ¿Apoya esta información la hipótesis de que la duración promedio del desempleo es de, como máximo, 8 meses? Utilice un nivel de significación del 5%.

   b) ¿Cuál sería la probabilidad de aceptar la hipótesis anterior si, en verdad, la duración promedio del desempleo fuera de 8,3 meses?

2. Los sueldos en determinada empresa siguen una distribución normal con media igual a \$1500 y desvío igual a \$620.

   a) ¿Cuál es el sueldo máximo que corresponde al 25% de los empleados con menor sueldo?

   b) Si se seleccionan al azar 15 empleados ¿cuál es la probabilidad de que al menos 10 de ellos cobre más de \$2520?

3. Se desea averiguar la proporción p de adultos desempleados en cierta comunidad. Para ello se está planeando tomar una muestra aleatoria de adultos en la comunidad. Se desea reportar un intervalo con 90% de confianza para la proporción p cuya longitud no supere 0,04.

   a) ¿Qué tamaño de muestra debe tomarse para construir un intervalo de confianza para p con las características deseadas?

   b) Si en una muestra de 1500 adultos, 75 dijeron estar desempleados, encuentre un intervalo de 90% de confianza para p basado en esta muestra.

4. Analice la propiedad de insesgamiento de los siguientes estimadores de la media poblacional que fueron construidos con una muestra aleatoria de tamaño tres. ¿Cuál de los dos elegiría? Justifique su respuesta.

   a) $\bar{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ *b)* $\bar{X} = \frac{1}{6}(X_1 + 2X_2 + 3X_3)$

5. *a)* Mencione las características de una variable aleatoria con distribución exponencial

   b) Deduzca la expresión de su valor esperado

PyE UTN - Final

FECHA 13-12-17

① Un grupo de sociólogos decide estudiar el fenómeno del desempleo. Para ello deciden realizar una encuesta a gente que ha recientemente conseguido trabajo, preguntando cuánto tiempo demoraron en salir de la situación de desempleo. Tras el procesamiento de 60 de estas encuestas, los resultados arrojan que, en promedio, los individuos de la muestra han estado desempleados por 8,5 meses. En base a información anterior, se sabe que la dispersión poblacional es de 0,77.

a) ¿Apoya esta información la hipótesis de que la duración promedio del desempleo es de, como máximo, 8 meses? Utilice un nivel de significación del 5%

$n = 60$
$\bar{X} = 8,5$
$\sigma = 0,77$
$\alpha = 0,05$

$H_0: \mu = 8$ vs $H_1: \mu > 8$

$e_m = \dfrac{\bar{X} - 8}{0,77/\sqrt{60}} \sim N(0,1)$ bajo H_0

Rechazo H_0 si $Z_{obs} > Z_{0.05}$

$Z_{obs} = \dfrac{(8,5 - 8,00)}{0,77}\sqrt{60} = 5,03$

$Z_{0.05} = -1,645$

$Z_{obs} > Z_{0.05} \rightarrow \boxed{\text{Rechazo } H_0}$

No hay evidencia para asegurar que el desempleo es, como máximo, de 8 meses

b) ¿Cuál sería la prob. de aceptar la hipótesis anterior si, en verdad, la duración promedio del desempleo fuera de 8,3 meses?

$P(\overbrace{\text{aceptar } H_0}^{\text{no rechazar } H_0} \mid H_0 \text{ F}) = P(Z_{obs} \leq Z_{0.05} \mid \mu = 8,3) =$

$= P\left(\dfrac{\bar{X} - 8}{0,0994} \leq -1,645 \mid \mu = 8,3\right) = P\left(\dfrac{\bar{X} - 8,3 + 0,3}{0,0994} \leq -1,645\right) =$

$= P\left(\left(\dfrac{\bar{X} - 8,3}{0,0994} + \dfrac{0,3}{0,994}\right) \leq -1,645\right) = P\left(\dfrac{\bar{X} - 8,3}{0,994} \leq -4,6629\right) =$

$= P(Z \leq -4,6629) = 0,00000156$

$\boxed{P(\text{aceptar } H_0 \mid \mu = 8,3) = 0,00000156}$

Sylvina

② Los sueldos en determinada empresa siguen una distribución normal con media igual a $1500 y desvío igual a $620

a) ¿Cuál es el sueldo máximo que corresponde al 25% de los empleados con menor sueldo?

X: "Sueldo, en pesos, en una determinada empresa" $X \sim N(1500, 620)$

Lo que pide el enunciado es conocer el percentil 25

$$P(X \leq q) = 0.25 = P\left(\frac{X-1500}{620} \leq \frac{q-1500}{620}\right) = P\left(Z \leq \frac{q-1500}{620}\right) = 0{,}25$$

$$\rightarrow \frac{q-1500}{620} = -0{,}675 \quad \text{pues} \quad z_{0,25} = -0{,}675$$

$$q - 1500 = -418{,}5 \rightarrow q = 1081{,}5$$

$$\boxed{\text{Sueldo máximo de los empleados con menor sueldo} = 1081{,}5}$$

b) Si se seleccionan al azar 15 empleados ¿cuál es la prob. de que al menos 10 de ellos cobre más de $2520?

$$P(X > 2520) = 1 - P(X \leq 2520) = 1 - P\Big(\underbrace{\frac{X-1500}{620}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{2520-1500}{620}\Big) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}6452) = 1 - 0{,}95 = \boxed{0{,}05} = p$$

Y: "cant de empleados que cobran más de $2520, de un grupo de 15"

$Y \sim Bi(15, 0.05)$

$$P(Y \geq 10) = 1 - P(Y < 10) \overset{\text{Y es discreta}}{=} 1 - P(Y \leq 9) \overset{\text{tabla}}{=} 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{P(Y \geq 10) = 0}$$

NOTA

PyE

FECHA 13-12-17

③ Se desea averiguar la proporción p de adultos desempleados en cierta comunidad. Para ello se está planteando tomar una muestra aleatoria de adultos en la comunidad. Se desea reportar un intervalo con 90% de confianza para la proporción p cuya longitud no supere 0,04

a) ¿Qué tamaño de muestra debe tomarse para construir un intervalo de confianza para p con las características deseadas?

$\alpha = 0.10$, $1-\alpha = 0.90$, $n = ?$ long $IC_{0{,}90}(p) \leq 0{,}04 \leq 2$ error

$$IC_{0{,}90}(p) = \left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

$\rightarrow 0{,}02 = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} =$ → el caso más desfavorable es con $\hat{p} = 0{,}5$.

$$= z_{0{,}95}\sqrt{\frac{0{,}5^2}{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} = 0{,}02$$

$$\rightarrow \sqrt{n} = 41{,}125 \rightarrow \boxed{n = 1692}$$

b) Si en una muestra de 1500 adultos 75 dijeron estar desempleados, encuentre un intervalo del 90% de confianza para p basado en esta muestra

X_i: "el i-ésimo adulto está desempleado" $i \in [1, 1500]$ $X_i \sim Be(p)$

$R(X) = \{0, 1\}$, $\hat{p} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i}{1500} = \frac{75}{1500} = 0{,}05 = \hat{p}$

$\alpha = 0{,}10$

$$IC_{0{,}90}(p) = \left[0{,}05 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}05 \times 0{,}95}{1500}} ; 0{,}05 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}05 \times 0{,}95}{1500}}\right] =$$

$$= [0.0407 ; 0.0593]$$

$$\boxed{IC_{0{,}90}(p) = [0.0407 ; 0.0593]}$$

Syl

④ Analice la propiedad de insesgamiento de los sig. estimadores de la media poblacional que fueron construidos con una muestra aleatoria de tamaño tres. ¿Cuál de los dos elegiría? Justifique su respuesta

a) $\bar{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ b) $\bar{X} = \frac{1}{6}(X_1 + 2X_2 + 3X_3)$

$E(X) = \mu$ $V(X) = \sigma^2$

$$\text{Sesgo}_a = E(\bar{X}) - \mu_a = E\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) - \mu = \frac{1}{3}(\overbrace{EX_1}^{\mu} + EX_2 + EX_3) - \mu =$$

$$= \frac{1}{3} 3\mu - \mu = \mu - \mu = 0 \rightarrow \boxed{\bar{X}_a \text{ es insesgado}}$$

$$\text{Sesgo}_b = E(\bar{X}_b) - \mu_b = E\left(\frac{1}{6}(X_1 + 2X_2 + 3X_3)\right) - \mu_b = \frac{1}{6}(\overbrace{E(X_1)}^{\mu} + 2E(X_2) + 3E(X_3)) - \mu_b =$$

$$= \frac{1}{6} 6\mu_b - \mu = \mu - \mu_b = 0 \rightarrow \boxed{\bar{X}_b \text{ es insesgado}}$$

Varianzas:

$$a: V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{9} V(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{1}{9}[\overbrace{V(X_1)}^{\sigma^2} + V(X_2) + V(X_3)] =$$

$$= \frac{1}{9} 3\sigma^2 = \boxed{\frac{\sigma^2}{3} = V(\bar{X}_a)}$$

$$b: V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{6}(X_1 + 2X_2 + 3X_3)\right) = \frac{1}{36}[V(X_1) + V(2X_2) + V(3X_3)] =$$

$$= \frac{1}{36}[\overbrace{V(X_1)}^{\sigma^2} + 4\overbrace{V(X_2)}^{\sigma^2} + 9\overbrace{V(X_3)}^{\sigma^2}] = \frac{1}{36} \cdot 14\sigma^2 = \boxed{\frac{7\sigma^2}{18} = V(\bar{X}_b)}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{7}{18} \rightarrow V(\bar{X}_a) < V(\bar{X}_b)$$

$$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \text{ es mejor estimador}}$$

HOJA N°

PyE - UTN - final FECHA 13-12-17

(5) a) Mencione las características de una v.a. con distribución exponencial

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

b) Deduzca la expresión de su valor esperado

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\, dx}_{0} + \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_{0}^{+\infty} \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{h'(x)}\, dx$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(x) = x & \rightarrow g'(x) = 1 \\ h'(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \rightarrow h(x) = -e^{-\lambda x} \end{array} \right\} \rightarrow g(x)\,h(x) - \int g'(x)\,h(x)$$

$$-x e^{-\lambda x} \underbrace{- \int -e^{-\lambda x}}_{+\int e^{-\lambda x} = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}}$$

$$\rightarrow \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \underbrace{-x e^{-\lambda x}}_{gh} \Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \underbrace{1 (-e^{-\lambda x})}_{g'h}\, dx =$$

$$= \underbrace{x e^{-\lambda x} \Big|_{+\infty}^{0}}_{\updownarrow} - \left[+ \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_{0}^{+\infty} \right] =$$

$$= \underbrace{-\lim_{x \to +\infty} x e^{-\lambda x}}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}}_{\to 0} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

Sylvina

NOTA